

3.- Dadas las funciones siguientes:

$$f(x) = x^3, \frac{1}{x^2+1}, \sqrt{1+x}, \cos x, e^x$$

Se pide calcular,

$$\int_0^2 f(x) dx$$

Utilizando las reglas del trapecio y de Simpson y comparar con los valores exactos.

Resolveremos estos problemas con el programa **IntNum** creado estudiando este apartado para las calculadoras TI 92 Plus / Voyage 200 de Texas Instruments. La resolución de los problemas incorpora los cálculos y las pantallas paso a paso. Además de comparar los valores aproximados con los exactos, tomaremos el punto medio del intervalo $[0, 2]$ que es el punto $x = 1$ para evaluar en cada uno, el error $E(x)$.

1 $f(x) = x^3$

1.1 Fórmula del trapecio.

<p>Jose Manuel Gomez presenta...</p> <p>INTEGRACIÓN NUMÉRICA v. 1.1 por la fórmula del Trapecio y la Regla de Simpson Análisis de problemas de cálculo numérico Máster MEF - Cálculo Numérico - AF.3 © 2010 José M. Gómez Vega ETSII-UNED Ingeniero Industrial mecánica máquinas</p> <p>Enter=OK ESC=CANCEL</p>	<p>Integración numérica por...</p> <p>1:Fórmula del Trapecio 2:Regla de Simpson</p>
<p>Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="x^3"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p>Enter=OK ESC=CANCEL</p>	<p>Integral por fórmula del Trapecio</p> $\int_a^b f(x) dx = 1/2 \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) + e(f)$

<p>siendo e(f):</p> $e(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi)$	<p>con $\xi \in [a,b]$</p>
<p>Cálculo con la fórmula del Trapecio</p> $1/2 \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) = t$	<p>Se obtiene por la fórm. del Trapecio: $t = 8$ Integral indefinida i(x) de f(x) $i(x) = \frac{x^4}{4}$ Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>
<p>x = 4 x = 4. Diferencia dif = x - t: dif = -4 dif = -4.</p>	<p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f': f''(x) = 6·x e(x) = -4.</p>

1.2 Regla de Simpson.

<p>Integración numérica por...</p> <p>1:Fórmula del Trapecio 2:Regla de Simpson</p>	<p>Regla de Simpson</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="x^3"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p>Enter=OK ESC=CANCEL</p>
--	--

Algebra	Calc	Other	Print	File	Up
Integral por regla de Simpson					
$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + e(f)$					

<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">siendo $e(f)$:</td> </tr> <tr> <td colspan="6"> $e(f) = \frac{-(b-a)}{2880} \cdot f''''(\xi)$ </td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	siendo $e(f)$:						$e(f) = \frac{-(b-a)}{2880} \cdot f''''(\xi)$						<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">con $\xi \in [a,b]$</td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	con $\xi \in [a,b]$																																															
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
siendo $e(f)$:																																																																									
$e(f) = \frac{-(b-a)}{2880} \cdot f''''(\xi)$																																																																									
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
con $\xi \in [a,b]$																																																																									
<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">Cálculo con la regla de Simpson</td> </tr> <tr> <td colspan="6"> $\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$ </td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	Cálculo con la regla de Simpson						$\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$						<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">Se obtiene por la regla de Simpson:</td> </tr> <tr> <td colspan="6">t = 4</td> </tr> <tr> <td colspan="6">Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$</td> </tr> <tr> <td colspan="6"> $i(x) = \frac{x^4}{4}$ </td> </tr> <tr> <td colspan="6">Valor exacto: x</td> </tr> <tr> <td colspan="6"> $\int_a^b f(x)dx$ </td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	Se obtiene por la regla de Simpson:						t = 4						Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$						$i(x) = \frac{x^4}{4}$						Valor exacto: x						$\int_a^b f(x)dx$																	
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
Cálculo con la regla de Simpson																																																																									
$\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$																																																																									
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
Se obtiene por la regla de Simpson:																																																																									
t = 4																																																																									
Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$																																																																									
$i(x) = \frac{x^4}{4}$																																																																									
Valor exacto: x																																																																									
$\int_a^b f(x)dx$																																																																									
<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">x = 4</td> </tr> <tr> <td colspan="6">x = 4.</td> </tr> <tr> <td colspan="6">Diferencia dif = x - t:</td> </tr> <tr> <td colspan="6">dif = 0</td> </tr> <tr> <td colspan="6">dif = 0.</td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	x = 4						x = 4.						Diferencia dif = x - t:						dif = 0						dif = 0.						<table border="1"> <tr> <td>Algebra</td> <td>Calc</td> <td>Other</td> <td>Print</td> <td>File</td> <td>Up</td> </tr> <tr> <td colspan="6">El error en el punto 1 es</td> </tr> <tr> <td colspan="6">según $E(x)$,</td> </tr> <tr> <td colspan="6">siendo f'''':</td> </tr> <tr> <td colspan="6">$f''''(x) = 0$</td> </tr> <tr> <td colspan="6">$e(x) = 0$</td> </tr> </table>	Algebra	Calc	Other	Print	File	Up	El error en el punto 1 es						según $E(x)$,						siendo f'''' :						$f''''(x) = 0$						$e(x) = 0$					
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
x = 4																																																																									
x = 4.																																																																									
Diferencia dif = x - t:																																																																									
dif = 0																																																																									
dif = 0.																																																																									
Algebra	Calc	Other	Print	File	Up																																																																				
El error en el punto 1 es																																																																									
según $E(x)$,																																																																									
siendo f'''' :																																																																									
$f''''(x) = 0$																																																																									
$e(x) = 0$																																																																									

En este caso, la regla de Simpson es más exacta que la fórmula del Trapecio. De hecho el error $E(x) = 0$, no siendo lo habitual.

2 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

2.1 Fórmula del trapecio.

<p style="text-align: center;">Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="1/(x^2+1)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	<p style="text-align: center;">Cálculo con la fórmula del Trapecio</p> $\frac{1}{2} \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) = t$
---	--

<p>Se obtiene por la fórm. del Trapecio: t = 6/5 Integral indefinida i(x) de f(x) i(x) = tan⁴(x) Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>$x = \frac{\pi}{2} - \tan^4(1/2)$ x = 1.10714871779 Diferencia dif = x - t: dif = -tan⁴(1/2) + $\frac{\pi}{2}$ - 6/5 dif = -.092851282206</p>
--	---

<p style="text-align: center;">El error en el punto 1 es según E(x), siendo f''':</p> $f'''(x) = \frac{2 \cdot (3 \cdot x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$ <p>e(x) = -1/3</p>
--

2.2 Regla de Simpson.

<p style="text-align: center;">Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="sqrt(1+x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	<p style="text-align: center;">Cálculo con la regla de Simpson</p> $\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$
---	---

<p>Se obtiene por la regla de Simpson: $t = 16/15$ Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$ $i(x) = \tan^4(x)$ Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>$x = \frac{\pi}{2} - \tan^4(1/2)$ $x = 1.10714871779$ Diferencia $dif = x - t$: $dif = -\tan^4(1/2) + \frac{\pi}{2} - 16/15$ $dif = .040482051127$</p>

<p>El error en el punto 1 es según $E(x)$, siendo f'''''':</p> $f''''''(x) = \frac{24 \cdot (5 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}$ <p>$e(x) = \frac{1}{480}$</p>

La regla de Simpson es, en este caso, el método de integración numérica que más se aproxima al valor exacto.

3 $f(x) = \sqrt{1+x}$

3.1 Fórmula del trapecio.

<p>Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración $f(x)$ Ejemplo de funciones: $1/x$, $\text{sen}(x)$, etc Función $f(x)$: $\sqrt{1+x}$</p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	
	<p>Cálculo con la fórmula del Trapecio $1/2 \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) = t$</p>

<p>Se obtiene por la fórm. del Trapecio: $t = \sqrt{3} + 1$ Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$ $i(x) = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3}$ Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>$x = 2\sqrt{3} - 2/3$ $x = 2.79743494847$ Diferencia $dif = x - t$: $dif = \sqrt{3} - 5/3$ $dif = .065384140902$</p>

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Clear Up </div> <p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f'':</p> $f''(x) = \frac{-1}{4 \cdot (x+1)^{3/2}}$ $e(x) = \frac{\sqrt{2}}{24}$ </div>
--

3.2 Regla de Simpson.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center; margin: 0;">Regla de Simpson</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="sqrt(1+x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p style="text-align: center;"> <input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/> </p> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Clear Up </div> <p>Cálculo con la regla de Simpson</p> $\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$ </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Clear Up </div> <p>$t = \frac{\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2} + 1}{3}$</p> <p>Integral indefinida i(x) de f(x)</p> $i(x) = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3}$ <p>Valor exacto: x</p> $\int_a^b f(x) dx$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Clear Up </div> <p>$x = 2 \cdot \sqrt{3} - 2/3$ $x = 2.79743494847$ Diferencia dif = x - t: $dif = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} - 1$ $dif = .001133262784$</p> </div>

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Clear Up </div> <p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f'''':</p> $f''''(x) = \frac{-15}{16 \cdot (x+1)^{7/2}}$ $e(x) = \frac{\sqrt{2}}{24576}$ </div>

La regla de Simpson se aproxima más.

4 $f(x) = \cos(x)$

4.1 Fórmula del trapecio.

<p>Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="cos(x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	<p>Cálculo con la fórmula del Trapecio</p> $1/2 \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) = t$
<p>Se obtiene por la fórm. del Trapecio: t = cos(2) + 1 Integral indefinida i(x) de f(x) i(x) = sin(x) Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>x = sin(2) x = .909297426826 Diferencia dif = x - t: dif = -cos(2) + sin(2) - 1 dif = .325444263373</p>
<p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f'':</p> $f''(x) = -\cos(x)$ $e(x) = \frac{2 \cdot \cos(1)}{3}$	

4.2 Regla de Simpson.

<p>Regla de Simpson</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc Función f(x): <input type="text" value="cos(x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	<p>Cálculo con la regla de Simpson</p> $\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$
---	---

<p>Se obtiene por la regla de Simpson:</p> $t = \frac{\cos(2) + 4 \cdot \cos(1) + 1}{3}$ <p>Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$ $i(x) = \sin(x)$ Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>$x = \sin(2)$ $x = .909297426826$ Diferencia $dif = x - t$: $dif = \frac{-\cos(2)}{3} + \sin(2) - \frac{4 \cdot \cos(1) + 1}{3}$ $dif = -.005723368816$</p>
---	---

<p>El error en el punto 1 es según $E(x)$, siendo f'''': $f''''(x) = \cos(x)$ $e(x) = \frac{-\cos(1)}{1440}$</p>
--

También aquí, la regla de Simpson se aproxima más al valor exacto.

5 $f(x) = e^x$

5.1 Fórmula del trapecio.

<p>Fórmula del trapecio</p> <p>Escriba función de integración $f(x)$ Ejemplo de funciones: $1/x$, $\text{sen}(x)$, etc Función $f(x)$: <input type="text" value="e^(x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p><input type="button" value="Enter=OK"/> <input type="button" value="ESC=CANCEL"/></p>	<p>Cálculo con la fórmula del Trapecio</p> $1/2 \cdot (f(b) + f(a)) \cdot (b - a) = t$
<p>Se obtiene por la fórm. del Trapecio:</p> $t = e^2 + 1$ <p>Integral indefinida $i(x)$ de $f(x)$ $i(x) = e^x$ Valor exacto: x $\int_a^b f(x)dx$</p>	<p>$x = e^2 - 1$ $x = 6.38905609893$ Diferencia $dif = x - t$: $dif = -2$ $dif = -2.$</p>

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f''':</p> $f'''(x) = e^x$ $e(x) = \frac{-2 \cdot e}{3}$ </div>
--

5.2 Regla de Simpson.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p style="text-align: center;">Regla de Simpson</p> <p>Escriba función de integración f(x) Ejemplo de funciones: 1/x, sen(x), etc</p> <p>Función f(x): <input type="text" value="e^(x)"/></p> <p>Extremo inferior a?: <input type="text" value="0"/></p> <p>Extremo superior b?: <input type="text" value="2"/></p> <p>Punto del error ξ: <input type="text" value="1"/></p> <p style="text-align: center;">(Enter=OK) (ESC=CANCEL)</p> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p>Cálculo con la regla de Simpson</p> $\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = t$ </div>
--	---

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p>Se obtiene por la regla de Simpson:</p> $t = \frac{e^2 + 4 \cdot e + 1}{3}$ <p>Integral indefinida i(x) de f(x)</p> $i(x) = e^x$ <p>Valor exacto: x</p> $\int_a^b f(x) dx$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p>$x = e^2 - 1$</p> <p>$x = 6.38905609893$</p> <p>Diferencia dif = x - t:</p> $dif = \frac{2 \cdot e^2}{3} - \frac{4 \cdot e}{3} - 4/3$ <p>$dif = -.031671705325$</p> </div>
---	---

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> Algebra Calc Other Print Save Clean Up </div> <p>El error en el punto 1 es según E(x), siendo f''''':</p> $f'''''(x) = e^x$ $e(x) = \frac{-e}{1440}$ </div>

La regla de Simpson se aproxima más al valor exacto.

Como conclusión final y tal y como se puede constatar, la regla de Simpson es un procedimiento de cálculo de integración numérica que se aproxima más al valor exacto de la integral, si bien el desarrollo de su cálculo es un poco más

complejo, tal y como se observa de una simple inspección a la naturaleza de la función aproximadora. En este ejercicio hemos podido comprobar cómo en poco tiempo se pueden desarrollar algoritmos de cálculo para evitar tener que hacerlos repetitivos a mano, siendo una solución más eficiente al problema.