1.- Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange que interpola a la función f(x) = sen x en el intervalo

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

tomando como soporte de interpolación los puntos:

$$\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Para resolver este tipo de problemas deberemos tener en cuenta la construcción de un **polinomio** llamado de **Lagrange**, de grado n, nulo en todos sus puntos x_k salvo en uno, que será el x_j, cuyo valor será 1. Éste será el polinomio general, aunque cada problema particular tendrá un grado k, de tal forma que existirán $k+1$ puntos de interpolación. El intervalo necesariamente debe estar acotado de tal forma que verifique, siendo los puntos de interpolación, todos distintos:

$$\{x_0, x_1, ..., x_k\} \ / \ x_i \neq x_j$$

$$\forall \zeta \in [a,b]\,,\ (a = x_0, b = x_k)\ \exists\ P(x) \simeq f(x)\ /\ |E(x)| \preceq |E_{máx}|$$

dado que fuera de ese intervalo no existirá interpolación y el error absoluto E(x) para esos puntos puede incrementarse por encima de su error máximo $E_{máx}$.

La interpolación de Lagrange significa matemáticamente aproximar una función $f(x)$ en un intervalo definido por los puntos donde se va a interpolar, como ya se ha visto, de tal forma que $P(x)$ sea aproximadamente igual a la función en dicho intervalo.

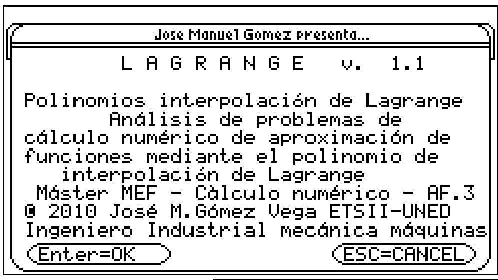
Polinomio de Lagrange:

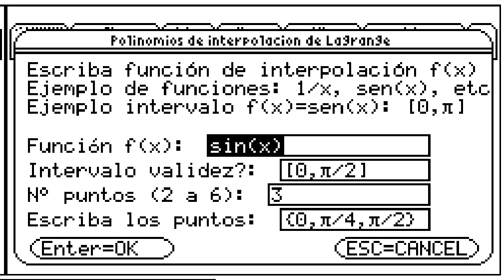
$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

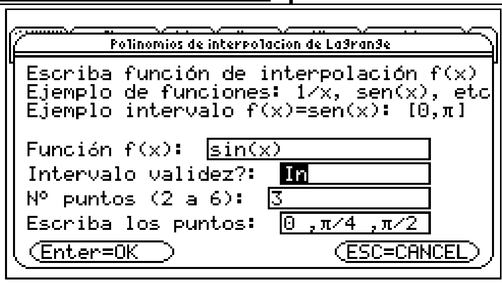
Interpolación de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

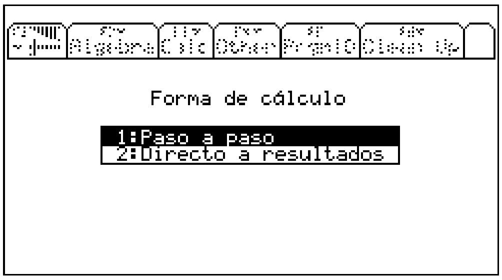
He creado un programa informático denominado **Lagrange** para las calculadoras **TI 92 Plus / Voyage 200** de Texas Instruments tras estudiar la asignatura AF.3 del curso modular MEF. Voy a realizar el cálculo paso a paso con las pantallas de este programa que es didáctico y presenta el cálculo secuencialmente. Vale para calcular cualquier interpolación de Lagrange para aproximar funciones en un intervalo de puntos. Realmente el intervalo en sí lo deciden los puntos, pero aún así se ha puesto de esta forma. El n^o de puntos puede ser de 2 a 6.



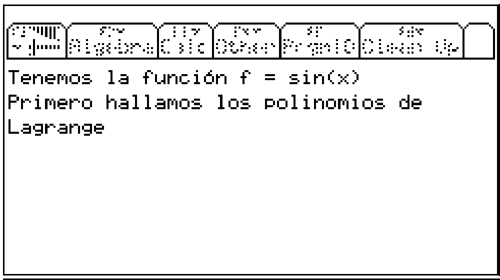


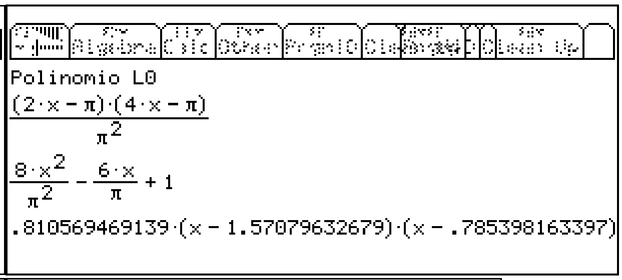


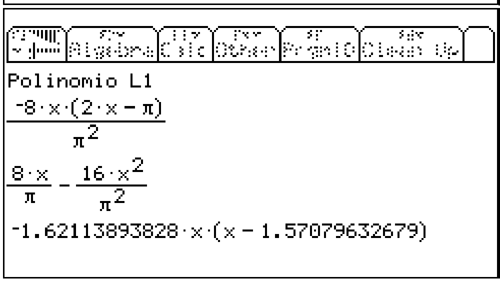
En el intervalo de validez, podemos en lugar de establecer el intervalo entre corchetes, cualquier caracter/es alfanumérico/s sin los corchetes. De esta forma, el programa asumirá que el intervalo estará comprendido en el cerrado correspondiente al punto primero más bajo y al punto último más alto, tal y como está en la 1^a de las pantallas de presentación de arriba. Podemos elegir entre resolver el problema paso a paso o ir directo al resultado del polinomio aproximador de Lagrange. A continuación se muestra un cálculo secuencial, paso a paso.

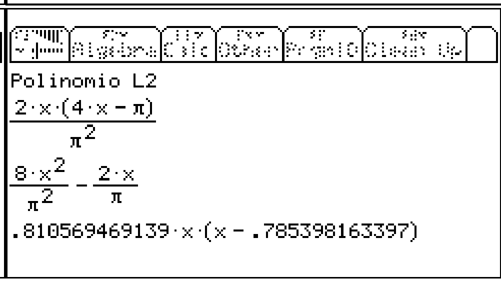


Primeramente definimos la función $f(x)$ introducida en los datos y obtenemos los polinomios $L_i(x)$, siendo $i = 0\ a\ 2$.

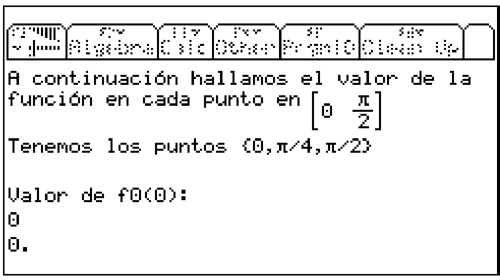


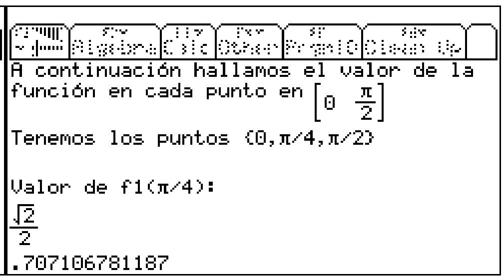


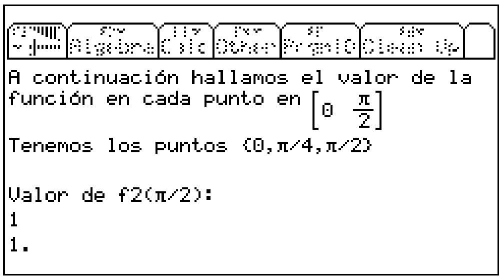




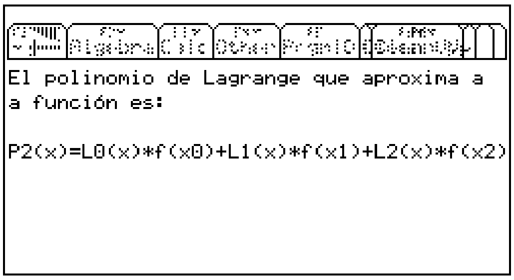
Una vez hallados los polinomios de Lagrange, obtenemos el valor de la función en cada uno de los 3 puntos dados.



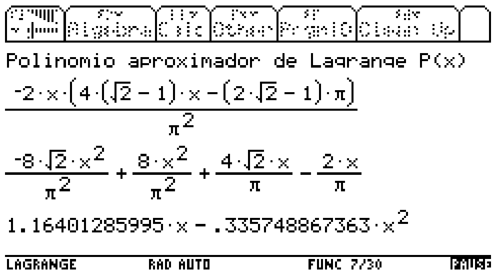




Como se sabe el polinomio de Lagrange aproximador tiene la forma siguiente (para 3 puntos).



Su cálculo es el siguiente, observando que la solución del polinomio la da en varios formatos, primero factorizado, segundo expandido en fracciones simples, y por último en decimales.



En el texto **Cálculo Numérico AF.3** del Curso Modular *"Teoría y aplicación práctica del método de los elementos finitos y simulación"*, en su página III.15, viene solo el polinomio de interpolación omitiéndose su cálculo, de la forma:

$$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4}x + \frac{1-\sqrt{2}}{\pi^2/8}x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Haciendo operaciones vemos como la expresión anterior es la misma que la mostrada en la calculadora en su formato expandido:

$$P_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x + \frac{8\left(1-\sqrt{2}\right)}{\pi^2}\left(x^2 - \frac{\pi}{4}x\right) = \frac{8}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{\pi}x - 8\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}x^2 + 4\frac{\sqrt{2}}{\pi}x$$

Ahora el programa **Lagrange** calculará el error máximo $E_{máx}$. Si queremos hallar una cota máxima del error de interpolación $E(x)$ en cada punto, tendremos:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad , \xi \in [a,b]$$

Definamos M, de la siguiente forma:

$$M = \underset{\xi\in[a,b]}{máx}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

Ahora definimos $\Phi(x)$, así:

$$\Phi(x) = \underset{\xi\in[a,b]}{máx}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| = \underset{\xi\in[a,b]}{máx}\left|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\right|$$

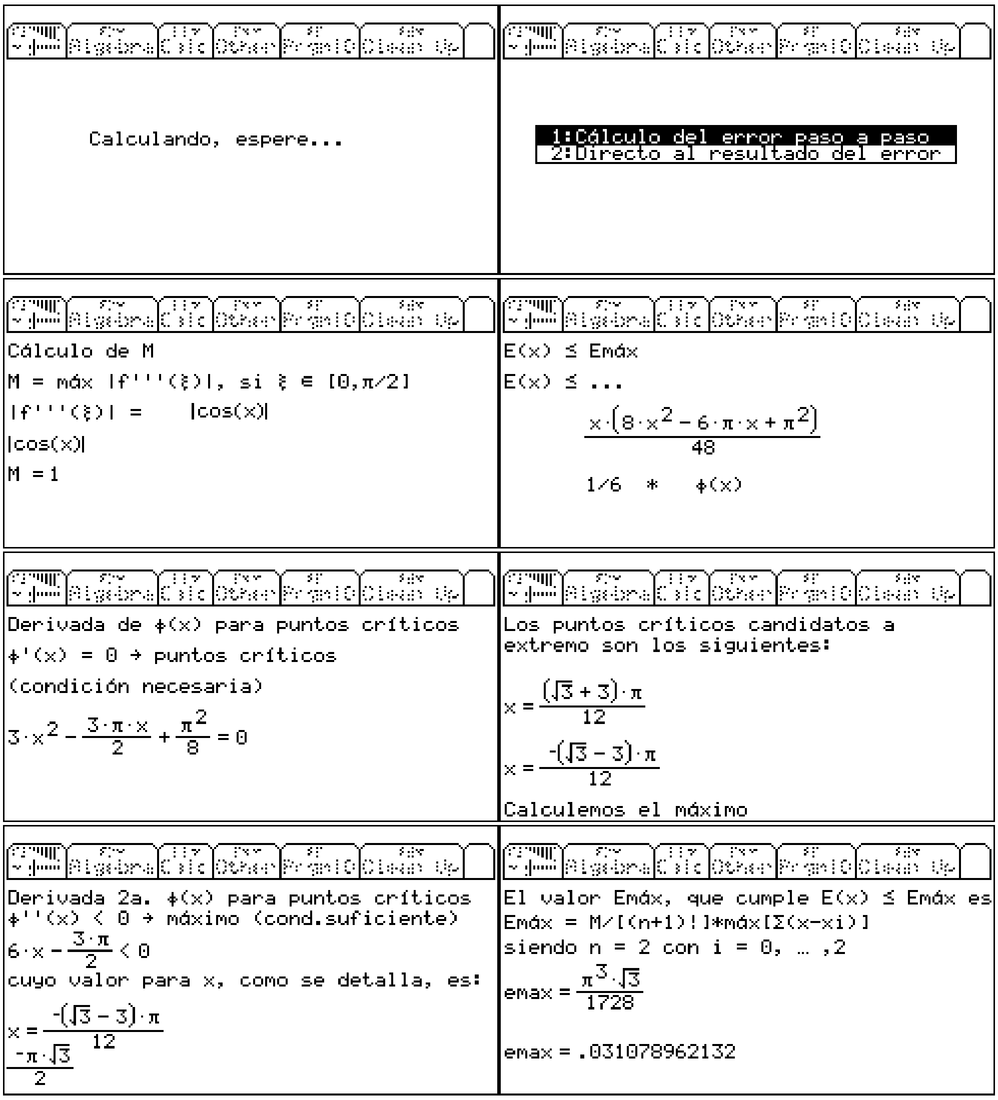
Entonces, tenemos:

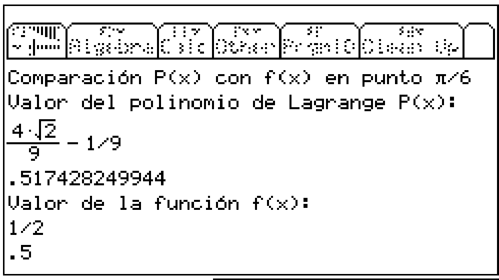
$$E_{máx} = \frac{M}{(n+1)!}\Phi(x),\ \forall\xi \in [a,b]$$

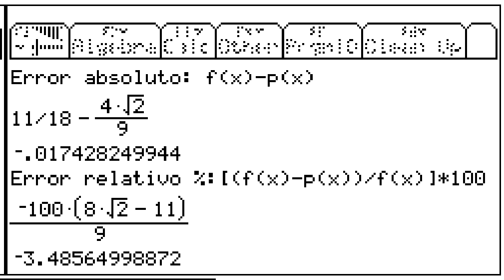
De tal forma que hemos logrado un mayorando para $E(x)$, con lo que logramos cuantificar el valor máximo del error al aproximar la función mediante la interpolación de Lagrange:

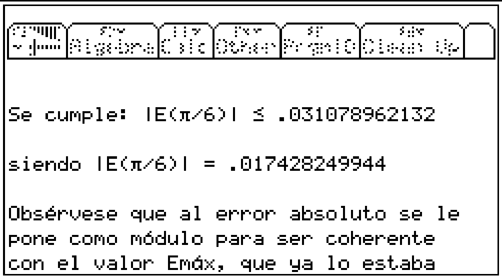
$$E(x) \leq E_{máx}\ ,\ \ \forall\xi \in [a,b]$$

Calculemos el error $E_{máx}$, con el programa. Nuevamente lo calculamos paso a paso, aunque se podría ir directo al resultado del error.



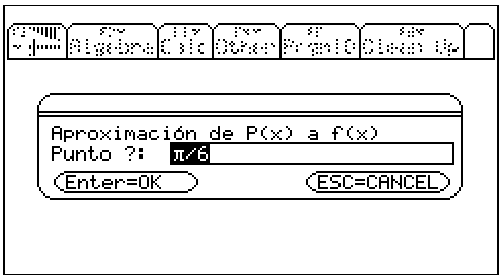




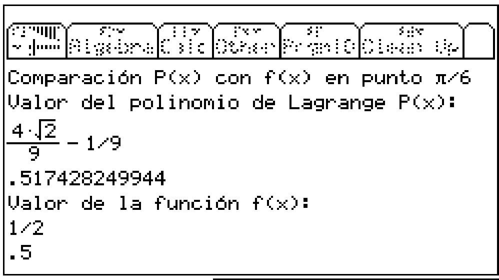


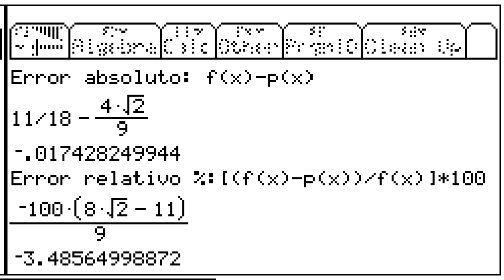
El programa a continuación muestra un menú para introducir un punto de aproximación que debe estar en el intervalo de puntos, pues como se sabe, el polinomio solo interpola en dicho intervalo. Elegimos $\frac{\pi}{6}$ que como se ve, cumple:

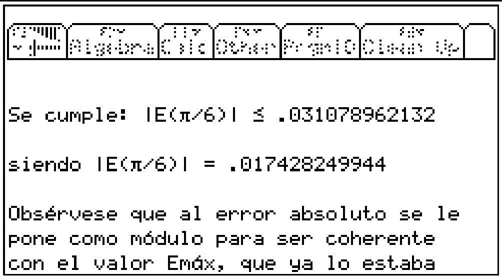
$$\tfrac{\pi}{6} \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



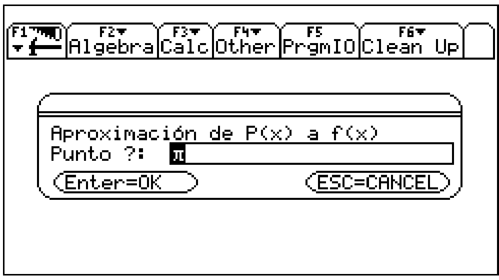
A continuación el programa muestra el error absoluto y el error relativo en % del punto seleccionado anteriormente (en nuestro caso $\frac{\pi}{6}$). Ambos errores no se dan en valores absolutos en un principio. Es por ello, que se han estimado tal y como aparecen en la siguiente pantalla, ofreciéndose primero como un valor algebraico y después con sus cifras decimales aproximadas:

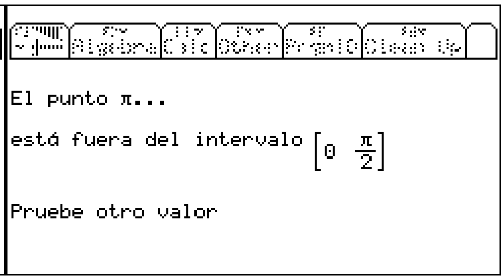




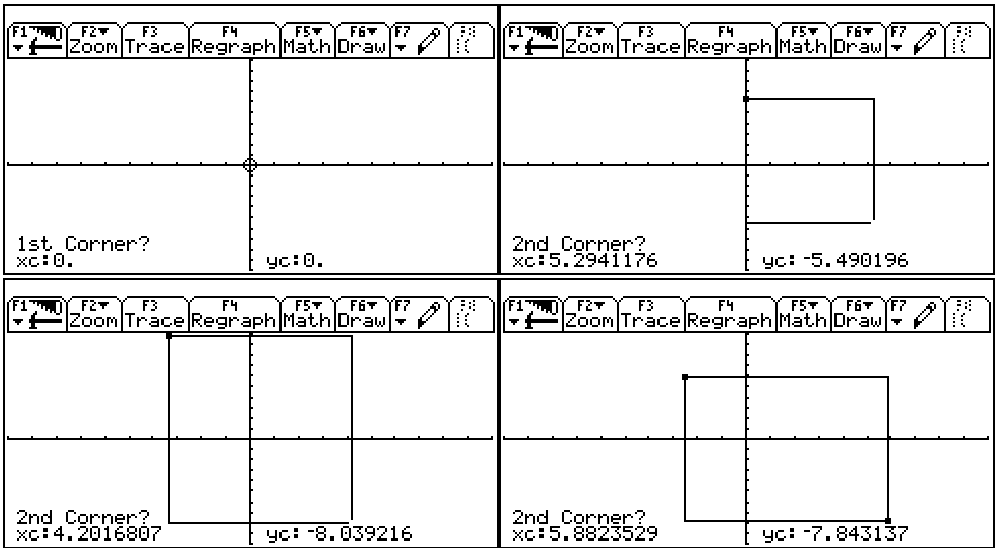


Podríamos haber elegido un punto que cayera fuera del intervalo, por ejemplo, π. El programa detecta que se está extrapolando a los valores del intervalo, por lo que aparece un mensaje de advertencia y no deja calcular los errores, dado que el polinomio no aproxima la función en valores fuera del intervalo, como es sabido.

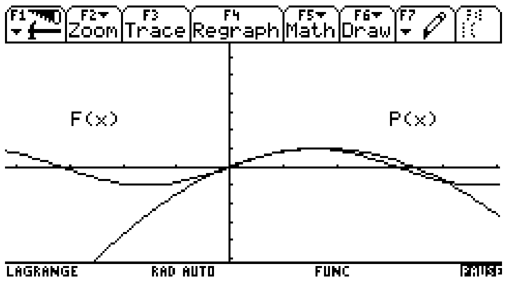




Una vez obtenido los datos de errores del punto se muestra una pantalla de gráficos en 2D, con eje Y de ordenadas y eje X de abcisas. Ahora debemos establecer un dominio visual para apreciar la gráfica. Para ello, tenemos que definir las esquinas del rectángulo sobre el cual aparecerán las gráficas $f(x)$ y $P(x)$. Una vez establecido el rectángulo, se pulsa nuevamente ENTER en la calculadora. Vemos como podemos hacer el rectángulo como queramos, pero siempre pensando en cómo es la función $f(x)$ para ello.

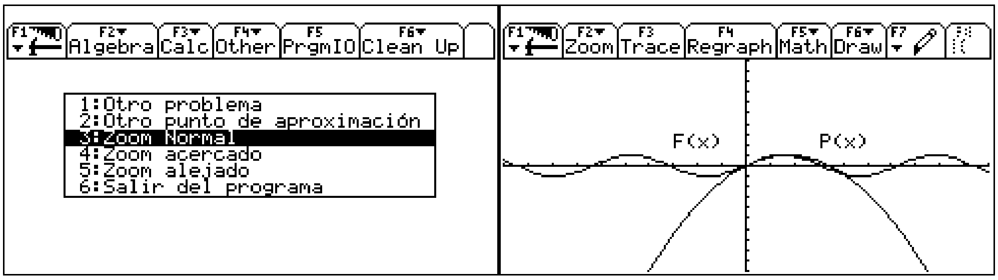


Entonces, aparecen las dos gráficas correspondientes, donde se aprecia fácilmente que el polinomio efectivamente se aproxima a la función en los valores del intervalo dado.

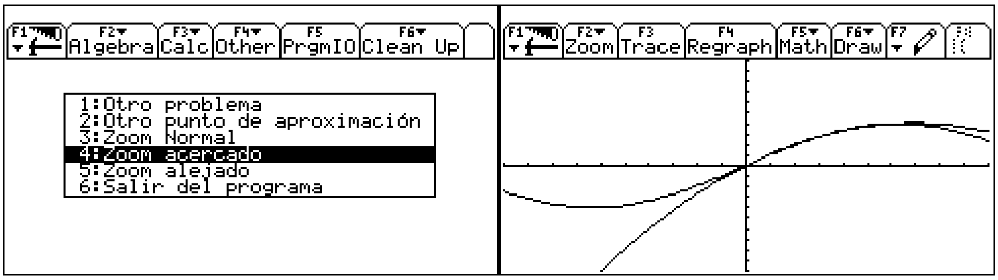


Una vez obtenidas las gráficas podemos acceder al menú de la pantalla siguiente, donde podemos elegir varios tipos de zoom: normal, acercado y alejado. Además si seleccionamos la opción *2:Otro punto de aproximación,* podremos volver a seleccionar un rectángulo a nuestra elección.

A continuación se observa un pantallazo de las gráficas con el zoom normal.



Otros pantallazos con el zoom acercado.



Pongamos como importante aclaración que si introducimos un intervalo de puntos en el primer menú que no se corresponde con los puntos introducidos, el programa calculará los errores absolutos y relativos muy elevados sobre esos puntos. Esto habrá que tenerlo en cuenta y no es un fallo del programa.

En definitiva, el programa **Lagrange** es una solución académica portable en una calculadora para estudiar polinomios aproximadores de Lagrange para cualquier tipo de función de una variable desde los 2 a los 6 puntos, es decir para interpolaciones de P(x) que van de 1 a 5.